

SIMULACIÓN MATEMÁTICA: APLICACIONES EN LA INGENIERÍA*

Ing. Alberto Hugo PUPPO
Académico de Número

La Simulación Matemática es un procedimiento aplicable a una amplia gama de problemas de diversa índole en Matemática, Física, Ingeniería en general, Economía, Ciencias Sociales, etc., desarrollado inicialmente por Enrico Fermi, John von Neumann y Stanislaw Ulam en las décadas del 30, 40 y 50 del siglo pasado.

El procedimiento se basaba en los números aleatorios puros, es decir, en números elegidos al azar, tales como los 2.500 de 5 cifras dados en el Handbook of Mathematical Functions de Abramowitz y Stegun. La simulación consiste en la repetición de esquemas de cálculo basados en datos generados con números aleatorios que responden a determinadas funciones de distribuciones de probabilidad (fdp). Los resultados obtenidos tienen histogramas que, a su vez, pueden aproximarse con apropiadas fdp.

La convergencia del procedimiento es lenta y requiere un elevado número de repeticiones para obtener resultados con una precisión aceptable. En consecuencia, el procedimiento basado en el empleo de tablas de números aleatorios es engorroso y de poca practicidad. Con el avvenir de las computadoras, los números aleatorios puros se sustituyeron por los números pseudoaleatorios, que en adelante llamamos, simplemente, números aleatorios. Se trata de números generados mediante algoritmos matemáticos. Estos números satisfacen ciertos requerimientos que los asemejan a los números aleatorios puros y pueden ser empleados en lugar de éstos.

Un algoritmo elemental para generar números aleatorios de cuatro cifras con distribución uniforme es el siguiente: se elige al azar un número de cuatro

* Resumen de la conferencia pronunciada en la Sesión Plenaria Ordinaria del 2 de junio de 2008.

cifras (la “semilla”), se lo eleva al cuadrado, se extraen las cuatro cifras centrales, con éstas se repite la operación y así, en sucesión, se genera una serie de números de cuatro cifras. Por ejemplo, se tiene la sucesión,

$$\begin{array}{ll} u_0 = 1234 & u_0^2 = 01522756 \\ u_1 = 5227 & u_1^2 = 27321529 \\ u_2 = 3215 & u_2^2 = 10336225 \\ u_3 = 3362 & u_3^2 = 11303044 \\ u_4 = 3030 & u_4^2 = 09180900 \end{array}$$

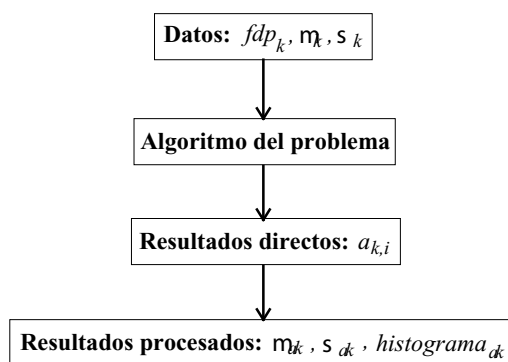
Los números aleatorios deben satisfacer requerimientos de uniformidad (histograma casi uniforme), de aperiodicidad (no repeticiones de series de números) y de “no previsibilidad simple” (gran dificultad para prever el número siguiente en el cálculo). Prácticamente todos los lenguajes de computación incluyen un generador sofisticado de números aleatorios.

En las Figuras 1, 2 y 3 se muestran histogramas normalizados (área unitaria) de números aleatorios comprendidos entre 10 y 30 obtenidos con simulaciones de 200, 2000 y 20000 repeticiones, respectivamente. Se observa que la uniformidad del histograma, y por lo tanto su “precisión” como serie de números aleatorios, aumenta con la cantidad de simulaciones.

Cuando en las aplicaciones de la simulación se habla de probabilidad, siempre se la debe entender como límite de una frecuencia al aumentar el número de repeticiones. A fin de ilustrar este concepto, se calcula la frecuencia en función del número de repeticiones en una simulación de ensayos de probabilidad 0.5 (cara o cruz al arrojar una moneda). En la Figura 4 se muestra el resultado de una simulación de 1.000 repeticiones, que permite apreciar la convergencia.

En las aplicaciones de la simulación matemática es necesario, en general, contar con números aleatorios con diversas fdp. En la Figura 5 se muestra un histograma de 10.000 números aleatorios con fdp normal de valor medio 20 y desviación estándar 2.

En su forma más simple, la aplicación de la simulación matemática a la resolución de un problema determinado puede resumirse en el diagrama siguiente:



Los k datos se expresan mediante sus fdp, generalmente definidas mediante sólo los dos parámetros (valor medio y desviación estándar). Para cada repetición i del cálculo empleando el algoritmo del problema, se obtienen los resultados directos para cada resultado, que puede ser uno sólo. Luego se procesan los resultados directos para obtener sus valores medios, desviaciones estándar e histogramas. Eventualmente, los histogramas pueden aproximarse mediante fdp's adecuadas y calcular, por ejemplo, valores característicos.

En problemas específicos es necesario refinar el procedimiento de aplicación de la simulación matemática. Por ejemplo, la determinación de la probabilidad de falla de las estructuras no puede hacerse en forma directa porque se necesitaría una enorme cantidad de repeticiones. En cambio, puede emplearse una simulación orientada, tal como la descrita en "Evaluation of Probabilities Using Oriented Simulation", Puppo A. H. y Bertero R. D., ASCE, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, No. 6, junio de 1992.

Cuando el valor de un dato de un problema determinado responde a múltiples factores, puede adoptarse una fdp de distribución normal de acuerdo con el teorema del límite central de la Teoría de las Probabilidades. Si se conoce una estadística para el dato, o sea, un histograma, puede ajustarse una fdp adecuada. Para determinados fenómenos, se emplean fdp que, como se sabe de acuerdo con estudios estadísticos y razonamientos matemáticos, resultan apropiados. Por ejemplo, los niveles máximos anuales de creciento de un río responden a una Distribución de Máximos Tipo I (Gumbel).

Como un primer ejemplo de aplicación de la simulación se considera una viga de hormigón armado en ménsula de longitud l , sección rectangular de ancho b y altura h , sometida a una carga permanente uniforme g y a una

carga accidental P , de corta duración y aplicada en el extremo libre. La deflexión del extremo libre está dada por,

$$w = \frac{l^3}{E \frac{bh^3}{12} \kappa} \left[\frac{gl}{8} (1 + \phi) + \frac{P}{3} \right]$$

siendo: E , el módulo de elasticidad longitudinal del hormigón; κ , un factor que tiene en cuenta la cuantía de armadura y la fisuración; ϕ , el coeficiente de deformación diferida y contracción de fraguado del hormigón.

Se adoptan fdp normales para todas las variables aleatorias, cuyos valores medios y desviaciones estándar son (unidades básicas: kN, m):

$$\begin{aligned} \mu_E &= 24000000, & \sigma_E &= 2000000, & \mu_b &= 0.30, & \sigma_b &= 0.01, \\ \mu_h &= 0.80, & \sigma_h &= 0.02, & \mu_\kappa &= 0.60, & \sigma_\kappa &= 0.15, \\ \mu_l &= 7.00, & \sigma_l &= 0.20, & \mu_g &= 9.00, & \sigma_g &= 0.90, \\ \mu_\phi &= 2.50, & \sigma_\phi &= 0.30, & \mu_P &= 20.00, & \sigma_P &= 4.00, \end{aligned}$$

Con 1000 repeticiones, una simulación arroja valores de la deflexión mínimo y máximo de 0.024 y 0.301, respectivamente. Además, permite calcular el valor medio de 0.070 y la desviación estándar de 0.027.

Con los 1000 valores de la deflexión obtenidos con la simulación puede construirse un diagrama normalizado que, en este caso, puede aproximarse con la fdp de Gumbel Máximo Tipo I,

$$f1(x) = \alpha \exp \left[-\alpha (x - u) - e^{-\alpha(x-u)} \right]$$

En la Figura 6 se muestran el histograma normalizado y la función $f1(x)$.

Puede calcularse, por ejemplo, la probabilidad de que la deflexión sea mayor de 0.100 como,

$$p_{w1} = \int_{0.10}^{\infty} f1(x) dx = 0.124$$

o sea, una probabilidad del 12.4 %. Análogamente, la probabilidad de que la deflexión sea menor de 0.03 es,

$$P_{w2} = \int_0^{0.03} f1(x) dx = 0.025$$

es decir, una probabilidad del 2.5 %.

En un segundo ejemplo, se aplica la simulación matemática para obtener una “señal aleatoria” correspondiente a la velocidad del viento en función del tiempo distribuida según el espectro dado en el Eurocódigo. Se empieza por generar una señal de ruido blanco aleatorio u_r (fdp normal normalizada con valor medio nulo y desviación estándar unitaria) de $t_a = 2400$ s de duración y formada por $n = 65535$, valores que se representa en la Figura 7.

Mediante el empleo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) con,

$$f_a = \frac{1}{t_a} = 4.167 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}, \quad f_j = f_a j, \quad j = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$$

se genera el espectro correspondiente Su_j mostrado en la Figura 8.

El espectro del Eurocódigo se expresa como,

$$G(\phi) = \frac{6.8 \frac{L}{V_m}}{\left(1 + 10.2 \frac{\phi L}{V_m}\right)^{\frac{5}{3}}}$$

y se lo muestra en la Figura 9, con la frecuencia ϕ (1/s) en abscisas con escala logarítmica y adimensionalizado $(G(\phi)\phi/\sigma^2)$ en ordenadas, para $L = 150$ m, $V_m = 32$ m/s, $\sigma = 4.5$ m/s.

Los valores discretos S_j de $G(\phi)$ y la FFT de la señal simulada Tz_j son,

$$S_j = f_a G(f_j), \quad Tz_j = Tu_j \sqrt{\frac{n+1}{2}} S_j$$

siendo Tu_j la FFT del ruido blanco aleatorio. Antitransformando Tz se obtiene la señal simulada z representada en la Figura 10, que responde al espectro $G(\phi)$.

Finalmente, en la Figura 11 se muestran, adimensionalizados, el espectro discreto de la señal simulada Sz y el espectro continuo $G(\phi)$. Es de hacer notar que para valores bajos de la frecuencia los valores de Sz difieren considerablemente de los de $G(\phi)$. Si en un análisis posterior es necesario utilizar los valores de Sz es conveniente suavizarlo empleando el "Gaussian Kernel Method" o alguno similar.

Números seudo aleatorios - Histogramas

Distribución uniforme

$$m := 200 \quad a := 10 \quad b := 30 \quad Y := \text{runif}(m, a, b)$$

$$Y_{\min} := \min(Y) \quad Y_{\min} = 10.112 \quad Y_{\max} := \max(Y) \quad Y_{\max} = 29.983$$

Número de intervalos : $N := 10$

$$\text{Intervalo : } \Delta x_H := \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{N} \quad \Delta x_H = 1.987$$

Histograma :

$$H := \text{histogram}(N, Y)$$

Histograma normalizado :

$$H_n^{(2)} := \frac{H^{(2)}}{m \cdot \Delta x_H} \quad \Delta x_H \cdot \sum H_n^{(2)} = 1$$

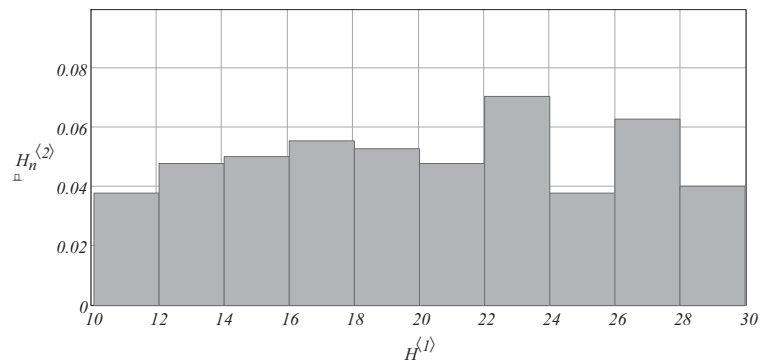


Figura 1

$$\mu := \text{mean}(Y) \quad \mu = 20.199 \quad \sigma := \text{stdev}(Y) \quad \sigma = 5.511$$

$$\delta := \frac{\sigma}{\mu} \quad \delta = 0.273$$

Distribución uniforme

$m := 2000$ $a := 10$ $b := 30$ $Y := \text{runif}(m, a, b)$

$Y_{\min} := \min(Y)$ $Y_{\min} = 10.009$ $Y_{\max} := \max(Y)$ $Y_{\max} = 29.994$

Número de intervalos : $N := 10$

Intervalo : $\Delta x_H := \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{N}$ $\Delta x_H = 1.999$

Histograma :

$H := \text{histogram}(N, Y)$

Histograma normalizado :

$$H_n^{(2)} := \frac{H^{(2)}}{m \cdot \Delta x_H} \quad \Delta x_H \cdot \sum H_n^{(2)} = 1$$

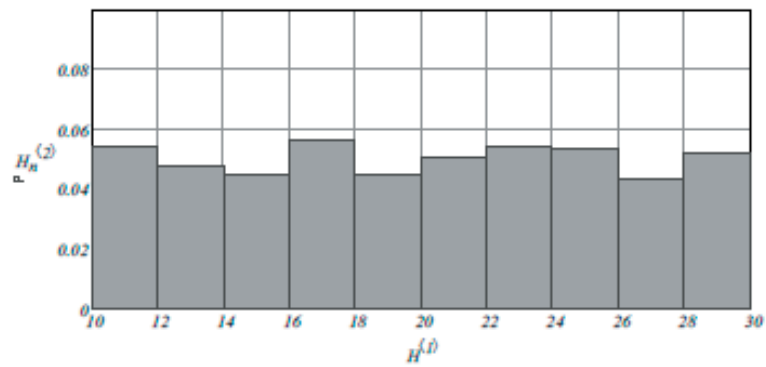


Figura 2

$\mu := \text{mean}(Y)$ $\mu = 20.013$ $\sigma := \text{stdev}(Y)$ $\sigma = 5.791$

$\delta := \frac{\sigma}{\mu}$ $\delta = 0.289$

Distribución uniforme

$m := 20000$ $a := 10$ $b := 30$ $Y := \text{runif}(m, a, b)$

$Y_{\min} := \min(Y)$ $Y_{\min} = 10.001$ $Y_{\max} := \max(Y)$ $Y_{\max} = 29.999$

Número de intervalos : $N := 10$

Intervalo : $\Delta x_H := \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{N}$ $\Delta x_H = 2$

Histograma :

$H := \text{histogram}(N, Y)$

Histograma normalizado :

$$H_n^{(2)} := \frac{H^{(2)}}{m \cdot \Delta x_H} \quad \Delta x_H \cdot \sum H_n^{(2)} = 1$$

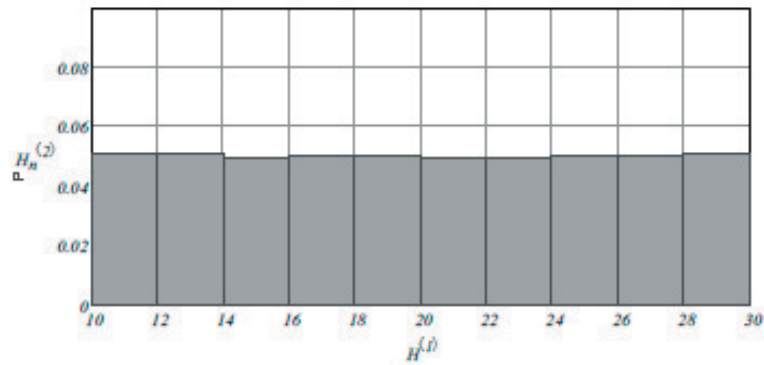


Figura 3

$\mu := \text{mean}(Y)$ $\mu = 19.993$ $\sigma := \text{stdev}(Y)$ $\sigma = 5.789$

$\delta := \frac{\sigma}{\mu}$ $\delta = 0.29$

Grandes números : Frecuencia -> Probabilidad

(Con CTRL + F9 recalcula con otra SEED)

$$p := 0.5 \quad u_0 := \text{rnd}(1) \quad u_0 = 1.675 \times 10^{-3} \quad a_0 := \text{if}\left(u_0 \leq \frac{1}{2}, 1, 0\right) \quad a_0 = 1$$

$$n := 1000 \quad i := 0..n \quad u_i := \text{rnd}(1) \quad a_{i+1} := a_i + \text{if}(u_i \leq p, 1, 0) \quad f_{i+1} := \frac{a_{i+1}}{i+1}$$

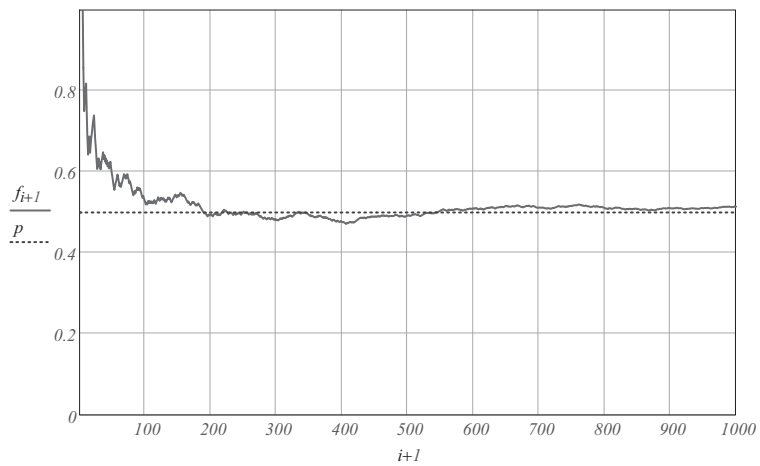


Figura 4

Números seudo aleatorios - Histogramas

Distribución normal

$$m := 2000 \quad \mu := 20 \quad \sigma := 2 \quad X := \text{rnorm}(m, \mu, \sigma)$$

$$X_{\min} := \min(X) \quad X_{\min} = 12.998 \quad X_{\max} := \max(X) \quad X_{\max} = 26.857$$

Número de intervalos : $N := 10$

$$\text{Intervalo : } \Delta x_H := \frac{X_{\max} - X_{\min}}{N} \quad \Delta x_H = 1.386$$

Histograma :

$$H := \text{histogram}(N, X)$$

Histograma normalizado :

$$H_n^{(2)} := \frac{H^{(2)}}{m \cdot \Delta x_H} \quad \Delta x_H \cdot \sum H_n^{(2)} = 1$$

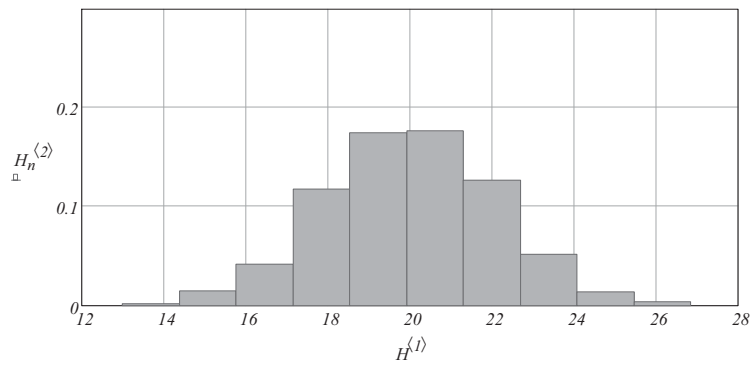


Figura 5

$$\mu := \text{mean}(X) \quad \mu = 20.007 \quad \sigma := \text{stdev}(X) \quad \sigma = 2.067$$

Deflexión de una ménsula (kN, m)

ORIGIN := 1

$$w(E, b, h, \kappa, l, g, \phi, P) := \frac{l^3}{E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \kappa} \left[\frac{g \cdot l}{8} \cdot (1 + \phi) + \frac{P}{3} \right] \quad M(l, g, P) := l \cdot \left(\frac{g \cdot l}{2} + P \right)$$

$$\mu_E := 24000000 \quad \sigma_E := 2000000 \quad \mu_b := 0.30 \quad \sigma_b := 0.01$$

$$\mu_h := 0.80 \quad \sigma_h := 0.02 \quad \mu_\kappa := 0.60 \quad \sigma_\kappa := 0.15$$

$$\mu_l := 7.00 \quad \sigma_l := 0.20 \quad \mu_g := 9.00 \quad \sigma_g := 0.90$$

$$\mu_\phi := 2.50 \quad \sigma_\phi := 0.30 \quad \mu_P := 20.00 \quad \sigma_P := 4.00$$

$$M_m := M(\mu_l, \mu_g, \mu_P) \quad M_m = 360.5 \quad \sigma_m := \frac{6 \cdot M_m}{\mu_b \cdot \mu_h} \quad \sigma_m = 1.127 \times 10^4$$

$$w_m := w(\mu_E, \mu_b, \mu_h, \mu_\kappa, \mu_l, \mu_g, \mu_\phi, \mu_P) \quad w_m = 0.064$$

$$m := 1000$$

$$VE := \text{rnorm}(m, \mu_E, \sigma_E) \quad Vb := \text{rnorm}(m, \mu_b, \sigma_b) \quad Vh := \text{rnorm}(m, \mu_h, \sigma_h)$$

$$V\kappa := \text{rnorm}(m, \mu_\kappa, \sigma_\kappa) \quad Vl := \text{rnorm}(m, \mu_l, \sigma_l) \quad Vg := \text{rnorm}(m, \mu_g, \sigma_g)$$

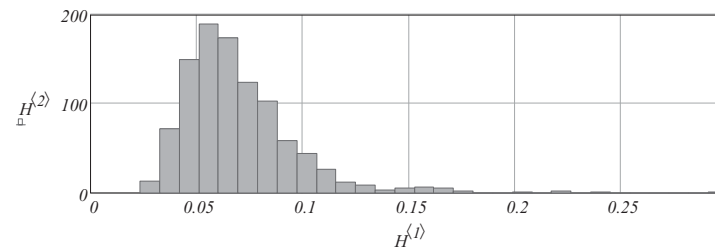
$$V\phi := \text{rnorm}(m, \mu_\phi, \sigma_\phi) \quad VP := \text{rnorm}(m, \mu_P, \sigma_P)$$

$$i := 1..m \quad Vw_i := w(VE_i, Vb_i, Vh_i, V\kappa_i, Vl_i, Vg_i, V\phi_i, VP_i)$$

$$\mu_w := \text{mean}(Vw) \quad \mu_w = 0.07 \quad \sigma_w := \text{stdev}(Vw) \quad \sigma_w = 0.027$$

$$w_{\min} := \min(Vw) \quad w_{\min} = 0.024 \quad w_{\max} := \max(Vw) \quad w_{\max} = 0.301$$

$$n_{int} := 30 \quad H := \text{histogram}(n_{int}, Vw)$$



Distribución de Máximos Tipo I (Gumbel) :

Parámetro de la inversa de la dispersión : $\alpha := \frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \sigma_w}$ $\alpha = 47.541$

Constante de Euler-Mascheroni :

$$N := 10000$$

$$\gamma := \sum_{p=1}^N \frac{1}{p} - \ln(N) \quad \gamma = 0.577$$

Parámetro de valor medio :

$$u := \mu_w - \frac{\gamma}{\alpha} \quad u = 0.057$$

Función de densidad de probabilidad :

$$f1(x) := \alpha \cdot \exp[-\alpha \cdot (x-u) - e^{-\alpha \cdot (x-u)}]$$

Función acumulada de distribución:

$$F1(x) := \exp[-e^{-\alpha \cdot (x-u)}]$$

Histograma normalizado :

$$\Delta := \frac{w_{max} - w_{min}}{n_{int}} \quad \Delta = 9.232 \times 10^{-3}$$

$$j := 1 .. n_{int}$$

$$h_j := \frac{(H^{(2)})_j}{m \cdot \Delta}$$

$$x := 0, 0 + \frac{w_{max} - w_{min}}{1000} .. w_{max}$$

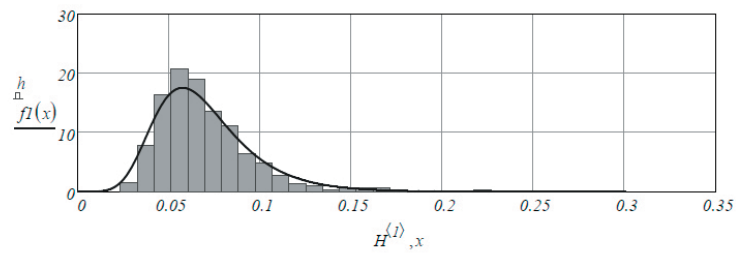
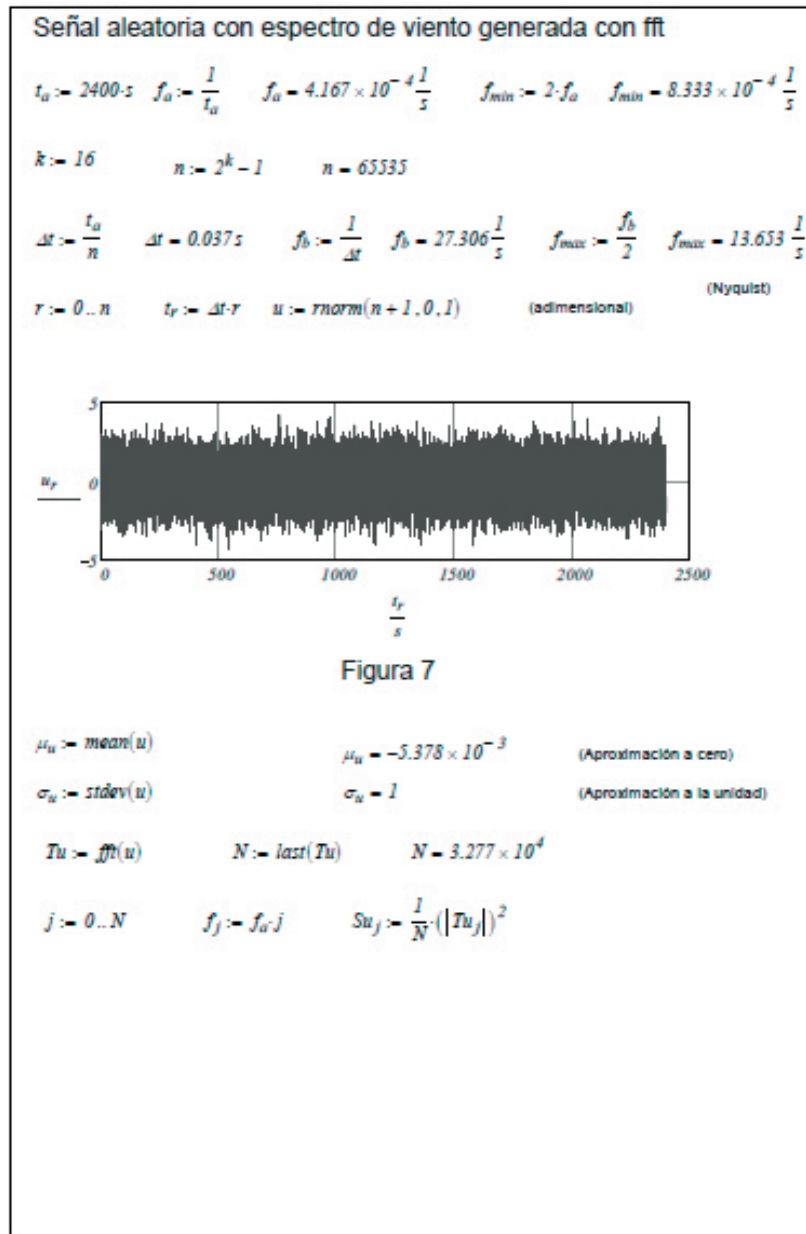


Figura 6



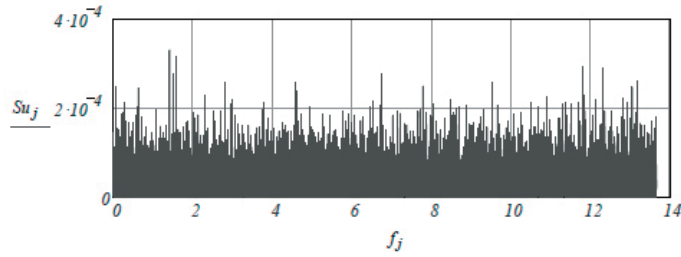


Figura 8

Desviación calculada con el espectro :
$$\sigma_u := \sqrt{\sum_{j=0}^N S_{u_j}} \quad \sigma_u = 1$$

"one side" espectro de viento (Eurocódigo) :

$$L := 150 \cdot m \quad V_m := 32 \cdot \frac{m}{s} \quad \sigma := 4.5 \cdot \frac{m}{s}$$

$$G(\phi) := \frac{6.8 \cdot \frac{L}{V_m}}{\left(1 + 10.2 \cdot \frac{\phi \cdot L}{V_m}\right)^{\frac{5}{3}}} \cdot \sigma^2$$

NOTA : Se usa ϕ en lugar de f porque f ya se usó como vector

Verificación directa :
$$\sigma_0 := \sqrt{\int_{\frac{0}{s}}^{\frac{100}{s}} G(\phi) d\phi} \quad \sigma_0 = 4.492 \frac{m}{s}$$

$$\phi := 0.001 \cdot \frac{1}{s}, 0.002 \cdot \frac{1}{s} \dots 10 \cdot \frac{1}{s}$$

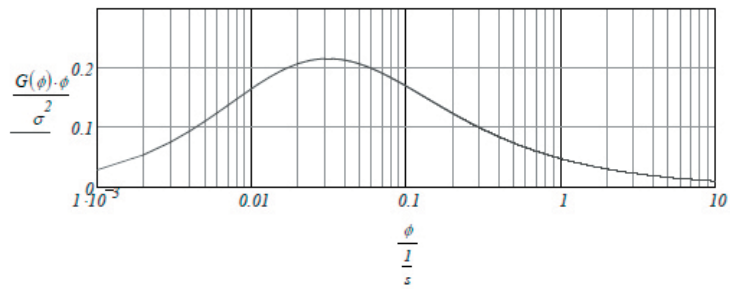


Figura 9

Espectros discretos (vectores) : $S_j := f_a G(f_j)$

Verificación con el espectro discreto : $\sigma_d := \sqrt{\sum_{j=0}^N S_j}$ $\sigma_d = 4.485 \frac{m}{s}$

Espectro de la señal simulada : $Tz_j := Tu_j \cdot \sqrt{N \cdot S_j}$

Señal simulada : $z := \text{iff}(Tz)$

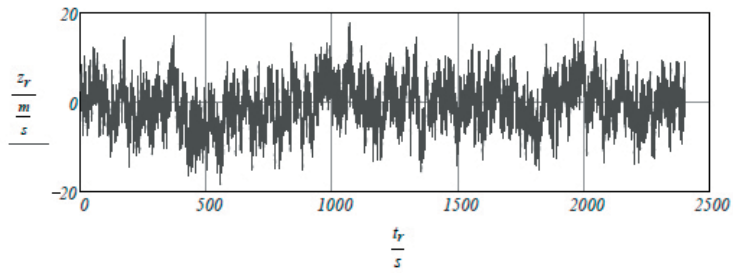


Figura 10

$$\mu_z := \text{mean}(z) \quad \mu_z = -0.505 \frac{m}{s} \quad \sigma_z := \text{stdev}(z) \quad \sigma_z = 4.883 \frac{m}{s}$$

Espectro (vector) de la señal simulada :

$$S_{z_j} := \frac{1}{N} (|T_{z_j}|)^2 \quad \sigma := \sqrt{\sum_{j=0}^N S_{z_j}} \quad \sigma = 4.935 \frac{m}{s}$$

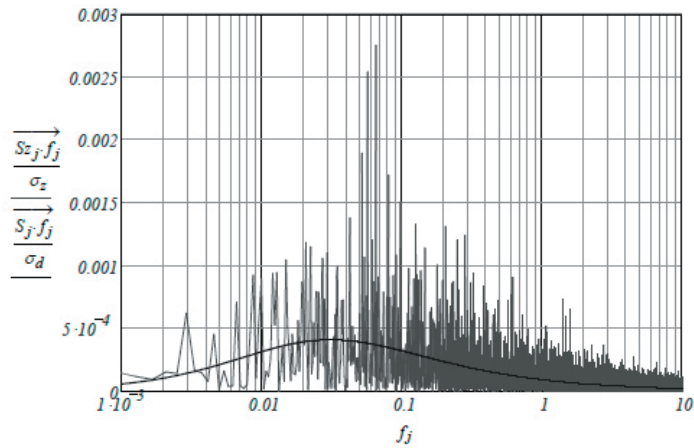


Figura 11